Lycée Pilote de Sfax	Résumé du cours Nombres complexes	Mr : Mourad EL arbi

I/ Définition et propriétés

Théorème et définition (rappel)

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés ci-dessous.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
2. Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2 = -1$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels. Cette écriture est appelée écriture cartésienne ou algébrique de z.

Conséquences

Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, où a, a', b et b' sont des réels. Alors

$z = z'$, si et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.

z est réel, si et seulement si, $b = 0$.

z est imaginaire, si et seulement si, $a = 0$.

z est imaginaire pur, si et seulement si, $a = 0$ et $b \neq 0$.

II/ Conjugué d'un nombre complexe

Définition

Soit $z = a + ib$, où a et b sont des réels. Le conjugué de z est le nombre complexe $\overline{z} = a - ib$.

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z', $\overline{\overline{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$.
- Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z', $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$.
- Pour tout nombre complexe z, $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$; $n \in \mathbb{Z}^*$.
- Si $z = a + bi$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ alors $z + \overline{z} = 2a$; $z - \overline{z} = 2bi$; $z\overline{z} = a^2 + b^2$.
- z est réel, si et seulement si, $\overline{z} = z$.
- z est imaginaire, si et seulement si, $\overline{z} = -z$.

III/ Affixe d'un point – Affixe d'un vecteur

Théorème

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

A tout nombre complexe $z = a + ib$ tel que a et b appartiennent à $\mathbb{R}$, on associe un unique point $M(a, b)$ du plan P appelé point image de z.

A tout point $M(a, b)$ du plan P, on associe un unique nombre complexe $z = a + ib$ tel que a et b appartiennent à $\mathbb{R}$ appelé affixe de M.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe d'image M. Alors le point M' image de $\overline{z}$ est le symétrique de M par rapport à l'axe $(O, \vec{u})$.

Lycée Pilote de Sfax	Résumé du cours Nombres complexes	Mr : Mourad EL arbi

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A et B deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B.

Le point I milieu du segment $[AB]$ a pour affixe $\frac{Z_A+Z_B}{2}$.

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

- Soit $\vec{W}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ un vecteur du plan. Le nombre complexe $z=a+ib$ est appelé affixe du vecteur $\vec{W}$ et on note $\text{aff}(\vec{W})=a+bi$.
- Soit M et N deux points d'affixes respectives z_M et z_N.

Le nombre complexe z_N-z_M est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MN}$ et on note $\text{aff}(\overrightarrow{MN})=Z_N-Z_M$.

Propriété

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ et pour tous réels α et β, $\text{Aff}(\alpha\vec{w}+\beta\vec{w_1})=\alpha\times\text{Aff}(\vec{w})+\beta\times\text{Aff}(\vec{w_1})$.

Théorème

Soit $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ deux vecteurs tels que $\vec{w_1}\neq\vec{0}$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\frac{\text{Aff}(\vec{w})}{\text{Aff}(\vec{w_1})}$ est réel.

Théorème

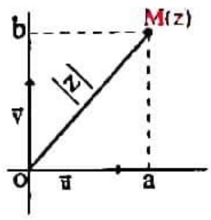
Soit $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ deux vecteurs tels que $\vec{w_1}\neq\vec{0}$.

$\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\frac{\text{Aff}(\vec{w})}{\text{Aff}(\vec{w_1})}$ est imaginaire.

IV/ Module d'un nombre complexe

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.



- Soit $z=a+ib$ et $M(a,b)$ le point d'affixe z.

  On appelle module de z le réel positif, noté $|z|$, défini par $|z|=OM=\sqrt{a^2+b^2}$.
- Pour tous points M et N d'affixes z_M et z_N, $|z_N-z_M|=MN$.

Propriétés

Pour tous nombres complexes z et z'.

- $|z|=0$, si et seulement si, $z=0$.
- $|\bar{z}|=|z|$; $|z|^2=z\bar{z}$.
- $|z+z'|\leq|z|+|z'|$; $|zz'|=|z||z'|$; $|z^n|=|z|^n, n\in\mathbb{Z}^*$; $\left|\frac{z'}{z}\right|=\frac{|z'|}{|z|}$, $z\neq0$.

Lycée Pilote de Sfax	Résumé du cours Nombres complexes	Mr : Mourad EL arbi

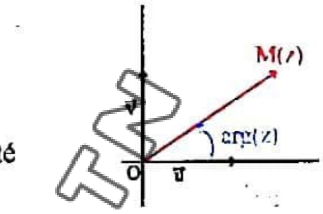
V/ Argument d'un nombre complexe non nul

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit z un nombre complexe non nul et M son image.

On appelle argument de z et on note $\arg(z)$, toute mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

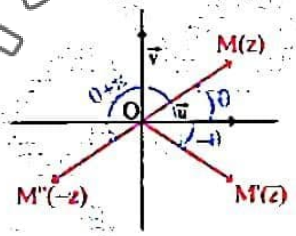


Propriétés

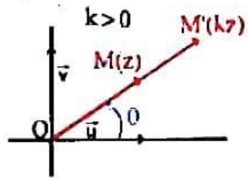
Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$.

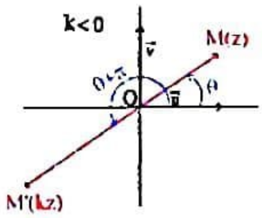
$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k > 0$ alors $\arg(kz) \equiv \arg(z)\ [2\pi]$.



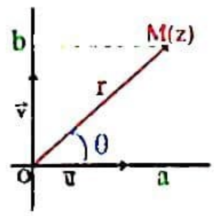
Si $k < 0$ alors $\arg(kz) \equiv \pi + \arg(z)\ [2\pi]$.



Théorème

Soit $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et $z \neq 0$.

Soit $r = |Z| = \sqrt{a^2+b^2}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\arg(z) \equiv \theta\ [2\pi]$. Alors $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{r} \end{cases}$



Ainsi $z = a + ib = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

L'écriture $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ s'appelle l'écriture trigonométrique de z.

Propriétés

- Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

$\arg(zz') \equiv \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$; $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$.

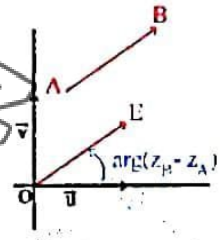
$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$, $n \in \mathbb{Z}$.

- Soit un nombre complexe non nul $z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.

Pour tout entier n, $z^n = |z|^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$. Cette formule est appelée formule de Moivre.

Lycée Pilote de Sfax	Résumé du cours Nombres complexes	Mr : Mourad EL arbi

Théorème



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A , B, C et D des points d'affixes respectives z_A , z_B, z_C et z_D et tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$.

Alors $\widehat{(\vec{u},\overrightarrow{AB})} \equiv \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$ et $\widehat{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD})} \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$.

VI/ Écriture exponentielle d'un nombre complexe non nul

Notation

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta + i\sin\theta$.

Conséquences

- $e^{i0} = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, $e^{i\pi} = -1$.
- Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta} = e^{i(\theta + 2k\pi)}$.
- Pour tout réel θ, $|e^{i\theta}| = 1$ et $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$.

Propriétés

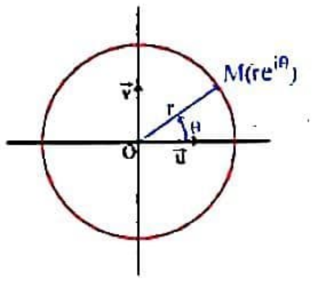
Soit deux réels θ et θ';

$e^{i\theta}e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}$.

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme $z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta[2\pi]$.

L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée écriture exponentielle de z.



Théorème (Formules d'Euler)

Pour tout réel x, $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

Propriétés

- Pour tous réels α et β, $e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} + e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) = 2\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.
- Pour tous réels α et β, $e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}\left(e^{i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}\right) = 2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$.

Lycée Pilote de Sfax	*Résumé du cours* *Nombres complexes*	*Mr : Mourad EL arbi*

VII/ Racines nièmes d'un nombre complexe non nul

Théorème

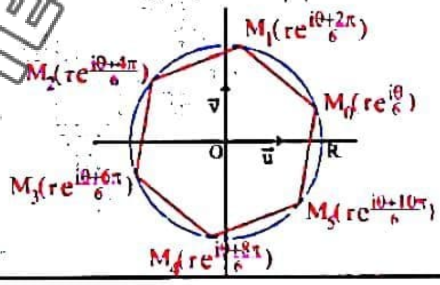
Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et un entier naturel $n \geq 2$.

L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par $z_k = r\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$,

où r est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$ que l'on note $r = \sqrt[n]{|a|}$.

Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a.

Conséquence

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = \|a\|$.	Les points images des solutions de l'équation $z^6 = \|a\|e^{i\theta}$ 

Cas particulier

Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées les racines nièmes de l'unité.

VIII/ Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Théorème

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$. Soit l'équation $(E) : az^2 + bz + c = 0$.

On pose $\Delta = b^2 - 4ac$ et on désigne par δ une racine carrée de Δ.

L'équation (E) admet deux solutions définies par $z_1 = \dfrac{-b+\delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-\delta}{2a}$.

Si $\Delta = 0$ alors $z_1 = z_2$.

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, alors

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$.

IX/ Équations de degré supérieur ou égal à 3

Théorème

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0$, $n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z) = (z - z_0)g(z)$, où $g(z)$ est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + \dots + b_0$,

avec $b_0, b_1, \dots, b_{n-2}$ complexes.